MAI 1 cvičení - limita posloupnosti - další příklady.

1. Vypočítejte následující limity (nebo ukažte, že neexistují):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+....+n}{n^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+....+n^2}{n^3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^{20}\cdot(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Víte-li, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. Věta o limitě monotonní posloupnosti.

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde

(i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

(ii) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$;

b) Ukažte, že platí : je-li $0 \le a_n$, pak posloupnost $\{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

c) Ukažte, že platí: Je-li $0 \le a_n \le b_n$, $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\}$, pak také konverguje posloupnost $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}$.

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti a) $\{\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n.2^n}\}$; b) $\{\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n!}\}$; c) $\{\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{2^n}{n!}\}$.

e) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \infty$. (Návod: ukažte, že daná posloupnost není cauchyovská.)

4. Problémky:
Dokažte následující tvrzení :
a) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R$ a nechť platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a,\ a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a,\ a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Formulujte tvrzení analogická k tvrzením c) a d) pro nevlastní limitu $+\infty$.

d) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0 \quad (a_n > 0)$.

5. a) Užitím 4c) ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0,\ x \in R,\ x \neq 0$.

b) Určete limity ($k \in N, |q| < 1$): i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n$; ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n!}$; iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

c) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

6. Ještě „aritmetika“ limit:
a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$? Tvrzení dokažte.
Na příkladech ukažte, že nelze formulovat žádné pravidlo pro součet v případě, že $a = \infty$ a $b = -\infty$.
Co lze říci (a co nelze) o $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$?

b) Spočítejte limity:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!}\ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!}\ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + \sin n! + n!}{n^3 + 2n!}\ ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!}\ .$$

7.* Spočítejte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \ldots\ldots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots\ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

8. Cauchyovské posloupnosti :
a) Opakování definice : ukažte dle definice, že posloupnost $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ je cauchyovská.

b) Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, $\{a_{n_k}\}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$ a nechť $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

c) Ukažte, že neklesající, shora omezená posloupnost je cauchyovská.

d)* Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \infty$. (Návod: ukažte, že daná posloupnost není cauchyovská.)